

Урок №15 (30.10.2007)  
Зачет по теме «Колебания»

1. Простые задачи

VI.3. Тело, движущееся поступательно, совершает гармонические колебания с амплитудой  $S$ . Зная, что наибольшая скорость тела равна  $V$ , а в момент начала отсчета времени тело движется в сторону убывания траекторной координаты и находится на расстоянии  $l_0=S/2$  от положения  $s=0$ , при котором его скорость максимальна, найти закон движения тела.

VI.4. Точка, движущаяся прямолинейно, совершает гармонические колебания. При этом амплитуды скорости и ускорения точки равны  $V$  и  $A$ . На каком расстоянии  $\Delta x$  от положения, соответствующего нулевой скорости, находится точка, когда ее скорость равна  $v_1$ ?

VI.20. Груз массы  $m=2$  кг, подвешенный к потолку комнаты на пружине жесткости  $k=450$  Н/м, совершает колебания вдоль оси пружины, двигаясь поступательно. Найти период колебаний груза.

14.17. Груз массой  $M$  совершает вертикальные колебания на пружине жесткостью  $k$  с амплитудой  $A$ . Когда груз находился в крайнем нижнем положении на него положили тело массой  $m$ , в результате чего колебания прекратились. Найти  $m$ .

14.18. Брусок массой  $M = 2$  кг лежит на гладкой горизонтальной поверхности и соединен с вертикальной стенкой горизонтальной пружиной жесткости  $k = 2$  Н/см. Пуля массой  $m = 10$  г, летящая горизонтально вдоль пружины со скоростью  $v = 200$  м/с, попадает в брусок и застревает в нем. Написать уравнение  $x(t)$  возникших колебаний. Положение равновесия принять за  $x = 0$ .

**14.19.** На гладкой горизонтальной поверхности находится брусок массой  $M$ , связанный с вертикальной стеной пружиной жесткости  $k$ . На бруске лежит второй брусок массой  $m$ . Систему отклоняют от положения равновесия и она начинает совершать гармонические колебания. При какой максимальной амплитуде колебаний они будут еще гармоническими, если коэффициент трения между брусками равен  $\mu$ ?

**14.20.** Два одинаковых бруска массой  $m$  каждый лежат один на другом и связаны пружинами жесткостью  $k_1$  и  $k_2$  с вертикальной стенкой (рис.

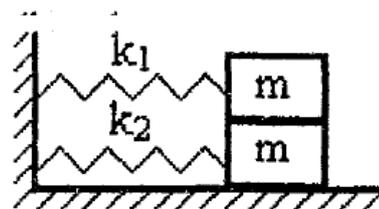


рис. 14.2

14.2). Система совершает горизонтальные колебания по гладкой горизонтальной поверхности. При какой максимальной амплитуде колебаний бруски еще не будут скользить друг по другу, если коэффициент трения между ними равен  $\mu$ ? Положения равновесия для пружин совпадают.

**14.24.** Тело, висящее на пружине, имело период вертикальных колебаний  $T_1$ . Когда массу тела изменили, период колебаний стал равен  $T_2$ . На сколько сместилось при этом положение равновесия?

**14.26.** Тело массой  $m_1$  совершает горизонтальные гармонические колебания на пружине с амплитудой  $A_1$ . Когда оно проходит положение равновесия, на него вертикально падает тело массой  $m_2$  и прилипает. Найти новую амплитуду колебаний.

**14.27.** Точка совершает гармонические колебания. При смещении точки от положения равновесия на  $x_1 = 2,4$  см ее скорость равна  $v_1 = 3$  см/с, а при смещении на  $x_2 = 2,8$  см скорость равна  $v_2 = 2$  см/с. Найти амплитуду и период колебаний точки.

**14.28.** Уравнения колебаний имеет вид:  $x(t) = A \cdot \sin \omega t$ . Известно, что при фазе колебания  $\varphi_1 = \pi/6$  смещение равно  $x_1 = 2$  см. Определить амплитуду колебаний и смещение при фазе  $\varphi_2 = 3/4\pi$ .

**14.29.** Точка совершает гармонические колебания. В момент  $t_0 = 0$  координата точки равна  $x_0 = 25$  см, а скорость -  $v_0 = 100$  см/с. Определить координату и скорость точки в момент  $t = 2,4$  с, если круговая частота колебаний равна  $\omega = 4$  с<sup>-1</sup>. В положении равновесия  $x = 0$ .

**14.30.** Точка совершает гармонические колебания по закону:  $x(t) = A \cdot \sin \omega t$ . В некоторый момент смещение точки от положения равновесия равно  $x_1 = 5$  см. При увеличении фазы колебаний вдвое смещение стало равно  $x_2 = 8$  см. Найти амплитуду колебаний.

**14.31.** Точка совершает гармонические колебания. При этом на расстояниях  $x_1$  и  $x_2$  от положения равновесия скорость точки равна  $v_1$  и  $v_2$ . Определить амплитуду и круговую частоту колебаний точки.

**14.32.** Когда груз неподвижно висит на пружине он растягивает ее на 5 см. Каков период колебаний груза на этой пружине?

**14.33.** К динамометру подвесили груз. При этом возникли колебания с частотой 2 Гц. На каком расстоянии от нулевой отметки остановится указатель динамометра, когда колебания прекратятся?

**14.34.** Тело массой  $m$  совершает горизонтальные гармонические колебания на пружине жесткостью  $k$  с амплитудой  $A$ . Определить максимальную мощность, развиваемую силой упругости пружины.

**14.35.** Тело может совершать горизонтальные гармонические колебания на пружине. Тело отклонили от положения равновесия и отпустили. Найти отношение кинетической энергии системы к потенциальной через время  $t$  после начала колебаний, если их период равен  $T$ . Массой пружины пренебречь.

**14.43.** Однородный цилиндр длиной  $l$  рис. 14.8 плавает в вертикальном положении на границе двух несмешивающихся жидкостей с плотностями  $\rho_1$  и  $\rho_2$  ( $\rho_1 < \rho_2$ ) и делится этой границей пополам. Пренебрегая сопротивлением, найти период малых вертикальных колебаний цилиндра.

**14.44.** Невесомая горизонтальная платформа стоит, как на ножках, на четырех одинаковых вертикальных пружинах. С высоты  $h$  в середину платформы падает кусочек пластилина массой  $m$  и прилипает к ней. Какова амплитуда возникших при этом колебаний? Жесткость каждой пружины равна  $k$ .

**14.48.** Тонкий обруч массой  $M$  и радиусом  $R$  может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через центр обруча. На обруче закреплен небольшой грузик массой  $m$ . Найти период малых колебаний обруча.

**14.50.** Период вертикальных колебаний груза на резиновом шнуре равен  $T$ . Каким будет период колебаний этого груза на том же шнуре, сложенном вдвое?

**14.51.** Небольшой шарик массой  $m$  совершает колебания с амплитудой  $A$  на нити длиной  $l$  ( $A \ll l$ ). На сколько изменяется сила натяжения нити в процессе колебаний?

**14.73.** Точка совершает движение в плоскости  $x, y$  по закону:  $x(t) = A \cdot \sin \omega t$ ;  $y(t) = A \cdot \cos \omega t$ . Что является траекторией движения точки? Определить ускорение точки.

## 2. Задачи похитрее

VI.13. Маятниковые часы опустили в шахту на глубину  $H=10$  км и запустили, установив точное время. Какую поправку к показанию этих часов следует сделать, чтобы узнать точное время через  $\tau=1$  сутки? Землю считать однородным шаром радиуса  $R=6380$  км.

VI.14. Во сколько раз изменится период малых колебаний математического маятника при перенесении его с Земли на Луну? Масса Луны в  $n=81$  раз меньше массы Земли, а радиус Земли в  $k=3,7$  раза больше радиуса Луны.

VI.22. Неподвижный груз, висящий на пружине, растягивает ее на величину  $x_1$ . Груз оттягивают вниз на расстояние  $x_0$  и, сообщив скорость  $v_0$  вертикально вверх, отпускают в момент времени  $t=0$ . Найти закон движения груза относительно положения равновесия, зная, что груз движется поступательно.

VI.23. В цилиндр массы  $M$ , подвешенный на легкой пружине жесткости  $k$ , с высоты  $h$  (рис. VI.13) падает груз массы  $m$ . Он прилипает к дну цилиндра. Найти период и амплитуду возникших колебаний, если цилиндр движется поступательно.

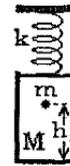


Рис. VI.13.

VI.24. На стоящую на столе, скрепленную с ним легкую цилиндрическую пружину, падает шар, который после касания пружины прилипает к верхнему витку. В момент касания скорость центра шара направлена по оси пружины и равна  $v_0$ . Зная, что максимальная деформация пружины —  $x_0$  и меньше ее длины, найти период и амплитуду колебаний шара. Потерями механической энергии пренебречь.

VI.28. Есть две легкие пружины. Если груз подвесить на первую пружину, то период его колебаний вдоль вертикали будет равен  $T_1$ , на вторую —  $T_2$ . С какими периодом  $T$  будет колебаться груз, если его подвесить на эти пружины, соединив их последовательно?

VI.36. Легкий стержень длины  $L$ , на концах которого закреплены два небольших одинаковых свинцовых шарика, может свободно вращаться вокруг горизонтальной оси, проходящей через стержень на расстоянии  $d$  от одного из его концов. Определить период малых колебаний стержня.

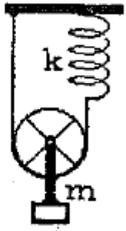


Рис. VI.16.

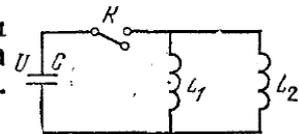
VI.38. К оси блока подвешен на жестком стержне груз. Блок висит на нити, один конец которой прикреплен к потолку, а другой – к пружине, закрепленной на потолке так, что отрезки нити, не лежащие на блоке, вертикальны (рис. VI.16). Масса груза со стержнем равна  $m$ , жесткость пружины –  $k$ . Груз немного оттягивают вертикально вниз и отпускают. Пренебрегая силами трения и массой блока, найти период колебаний груза.

VI.49. На груз массы  $m$ , подвешенный на легкой пружине жесткости  $k$ , действует сила вязкого трения, пропорциональная скорости груза, и направленная вертикально сила, проекция которой на направление вектора ускорения свободного падения изменяется по закону  $F_0 \cos pt$ . Зная, что груз движется поступательно, найти амплитуду  $V$  скорости установившихся колебаний груза, если коэффициент вязкого трения равен  $b$ .

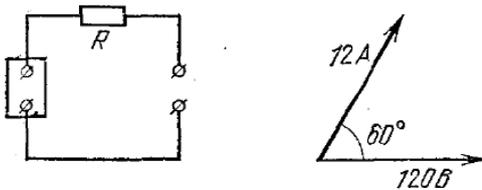
VI.56. Груз, подвешенный на легкой пружине, совершает вертикальные гармонические колебания в вязкой жидкости с амплитудой  $Y$  под действием силы  $F$ , изменяющейся во времени по гармоническому закону с амплитудой  $F_0$ . Фаза колебаний груза отстает от фазы силы  $F$  на угол  $\varphi$ . Найти работу источника силы за период колебания.

I.17. К грузу массы  $M$ , висящему на легкой пружине жесткостью  $k$ , на нити подвешен второй груз так, что центры масс грузов лежат на одной вертикали, совпадающей с осью пружины. После пережигания нити первый груз совершает гармонические колебания, при которых амплитуда его скорости равна  $v_m$ . Найти массу второго груза.

4.7. Найдите максимальные токи в индуктивностях  $L_1$  и  $L_2$  после замыкания ключа  $K$  в цепи, изображенной на рисунке. Емкость конденсатора  $C$ , начальное напряжение  $U$ .



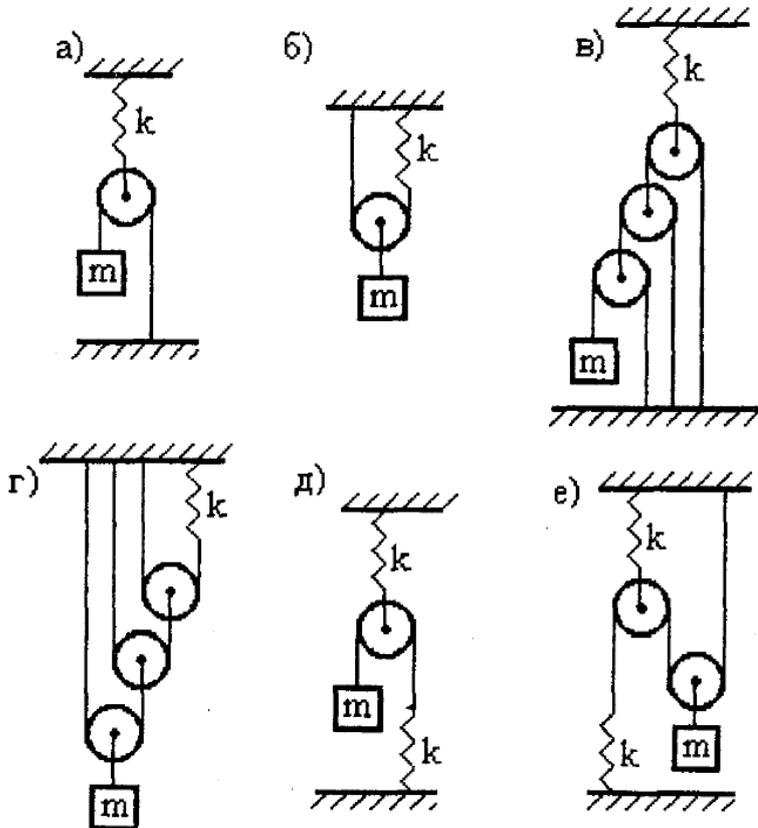
4.14. Значения напряжения, тока и сдвига фаз между напряжением и током в цепи нагрузки показаны на век-



К задаче 4.14.

торной диаграмме. Определите амплитуду э. д. с. источника и к. п. д. установки, если  $R = 10 \text{ Ом}$ .

**14.47.** На груз массой  $M$ , висящий на пружине, кладут еще один груз массой  $m$ , удерживая систему в начальном положении. Затем грузы отпускают. Найти максимальную силу, действующую на верхний груз со стороны нижнего.



**14.54.** Жидкость объемом  $V = 16 \text{ см}^3$  налита в  $V$ -образную трубку с площадью сечения  $S = 0,5 \text{ см}^2$ . Одно колено трубки вертикально, а другое наклонено к вертикали под углом  $\alpha = 30^\circ$  (рис. 14.11). Определить период колебаний жидкости в трубке. Вязкость не учитывать.

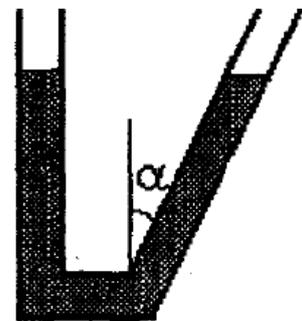


рис. 14.11

**14.80.** Тело может без трения вращаться вокруг горизонтальной оси. Тело расположили так, что его центр масс оказался точно над осью и отпустили без начальной скорости. При этом тело прошло положение равновесия с угловой скоростью  $\omega$ . Найти период малых колебаний тела.

**14.81.** Два тела совершают малые колебания вокруг одной и той же оси с круговыми частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ . Моменты инерции тел относительно этой оси равны  $J_1$  и  $J_2$  соответственно. С какой частотой будут колебаться тела, если их соединить вместе?

**14.55.** Груз массой  $m = 0,25$  кг лежит на гладкой горизонтальной поверхности между двумя пружинами, жесткость которых равна  $k_1 = 150$  Н/м и  $k_2 = 250$  Н/м. Первоначально пружины ненагружены. В некоторый момент конец пружины  $k_2$  резко сдвигают на расстояние  $a = 4$  см в сторону груза и закрепляют. Определить амплитуду и максимальную скорость возникших колебаний.

**14.56.** На наклонной плоскости находится брусок, к которому на нити подвешена небольшая шайба. Шайба без трения совершает гармонические колебания с периодом  $T_0$  (рис. 14.12).

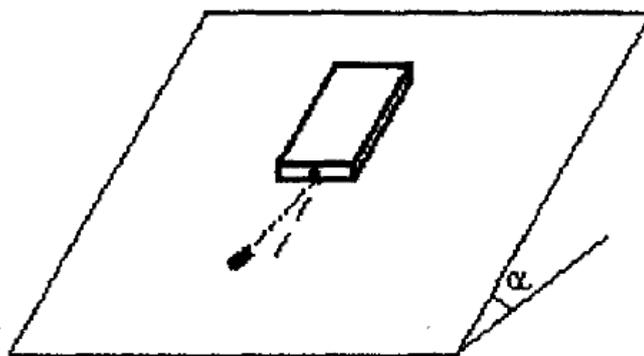


рис. 14.12

Каким будет период колебаний шайбы, если брусок отпустить? Угол наклона плоскости равен  $\alpha$ , коэффициент трения между бруском и плоскостью равен  $\mu$ , масса бруска намного больше массы шайбы.

**14.57.** Система состоит из двух брусков массами  $m$  и  $2m$ , между которыми пружина жесткости  $k$ . Систему поставили вертикально (рис. 14.13). При какой максимальной амплитуде колебания верхнего бруска массой  $m$  будут гармоническими?

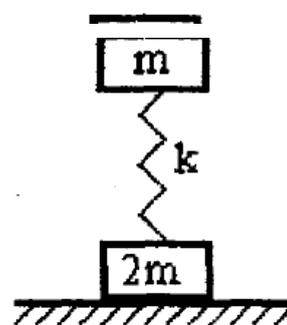


рис. 14.13

**14.58.** Два тела массой  $m$  каждое связаны пружиной жесткости  $k$  и движутся со скоростью  $v$  по гладкой горизонтальной поверхности к стенке. В некоторый момент одно из тел находилось на расстоянии  $L$  от стенки (рис. 14.14). Через какое время оно опять будет находиться на расстоянии  $L$  от стенки? Начальных колебаний нет, столкновения со стенкой абсолютно упругие.

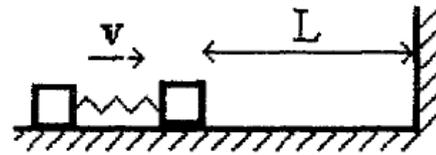


рис. 14.14

**14.59.** Два одинаковых маленьких шарика массой  $m$  каждый висят на двух одинаковых вертикальных нитях длиной  $l$  и связаны пружиной жесткости  $k$  (рис. 14.15). Шарикам сообщили одинаковые небольшие скорости навстречу друг другу. Определить период возникших малых колебаний.

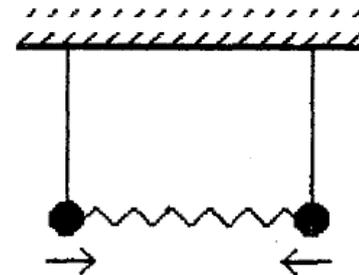


рис. 14.15

**14.67.** Легкий стержень АВ прикреплен шарнирно к стене и удерживается горизонтально вертикальной нитью СД длиной  $l$ . На конце стержня укреплен небольшой массивный шарик (рис. 14.18). Найти период малых колебаний системы.

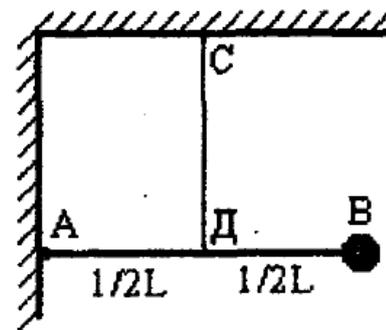


рис. 14.18

14.70. Груз, лежащий на гладкой горизонтальной поверхности, прикреплен пружиной длиной  $l$  к вертикальной стене. Пружину разрезали на две части длиной  $l_1$  и  $l_2$  и соединили их с тем же грузом между двумя стенками (рис. 14.20). Найти период горизонтальных колебаний груза во втором случае, если в первом случае период был равен  $T_0$ .

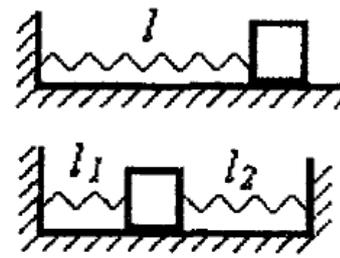


рис. 14.20

3. *И еще более хитрые задачи...*

VI.27. На гладком горизонтальном столе лежат два кубика, прикрепленные нитью к сжатой пружине жесткости  $k$ . Ось пружины горизонтальна и совпадает с прямой, проходящей через центры масс кубиков. Массы кубиков равны  $m_1$  и  $m_2$ . Найти периоды колебаний кубиков, возникающих после пережигания нити.

VI.32. На гладком столе лежит тонкое резиновое кольцо массы  $m$ . Жесткость кольца равна  $k$ . Кольцо немного равномерно растягивают и отпускают. Найти период колебаний кольца.

14.60. Два грузика массами  $m_1$  и  $m_2$ , связанные пружиной жесткости  $k$ , лежат на гладкой горизонтальной поверхности. Каков период колебаний такой системы?

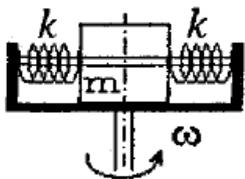


Рис. VI.14.

VI.33. На гладкий горизонтальный стержень надета муфта массы  $m=100$  г, прикрепленная к двум одинаковым пружинам жесткости  $k=10$  Н/м каждая (рис. VI.14). Концы пружин закреплены в точках крепления стержня к скобе, которую вращают вокруг вертикальной оси, проходящей через середину стержня, с угловой скоростью  $\omega=5$  рад/с. Найти период малых колебаний муфты и частоты вращения скобы, при которых колебаний муфты не будет.

VI.44. Скользящий по гладкому горизонтальному полу со скоростью  $v_0$  шар массы  $M$  ударяется о другой шар того же размера массы  $m$ . Шар массы  $m$  прикреплен к стене пружиной жесткости  $k$  так, что ось пружины совпадает с прямой, проходящей через центры шаров. Разность длин пружины в недеформированном и полностью сжатом состояниях равна  $L$ . Считая удар шаров упругим и мгновенным, найти условия, при которых шар массы  $m$  будет после удара совершать гармонические колебания.

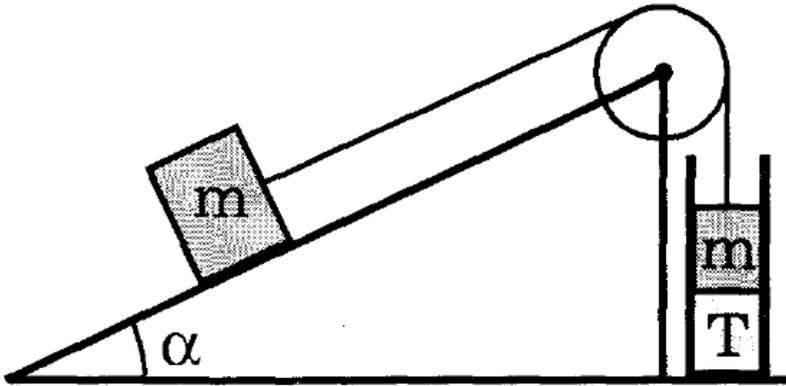
VI.45. На горизонтальной плоскости лежит груз массы  $m$ , прикрепленный к вертикальной стене легкой пружиной жесткости  $k$  так, что ось пружины горизонтальна и ее продолжение проходит через центр масс груза. Коэффициент трения груза о плоскость равен  $\mu$ . Считая, что ось  $Ox$  параллельна оси пружины и груз отпустили, сместив на расстояние  $x_0 > 0$  от положения  $x=0$ , при котором пружина недеформирована, составить уравнение движения груза.

I.12. Два шара одинакового радиуса с массами  $m$  и  $M$ , скрепленные легкой пружиной жесткости  $k$ , лежат на гладкой горизонтальной плоскости. Ось пружины совпадает с прямой, проходящей через центры шаров. Пружина сжата прикрепленной к шарам нитью на величину  $\Delta x$ . Найти максимальную скорость шара массы  $m$  при колебаниях, возникающих после пережигания нити.

I.13. К середине боковой стороны бруска массы  $M$ , лежащего на горизонтальной плоскости стола, прикреплена легкая пружина жесткости  $k$ , другой конец которой прикреплен к вертикальной стенке так, что ось пружины горизонтальна. К середине противоположной стороны бруска прикреплена легкая нерастяжимая нить, перекинутая через неподвижный блок. На нити висит другой блок, к оси которого подвешен кубик массы  $m$ . Верхний конец нити прикреплен к потолку. Первоначально кубик удерживали в положении, при котором пружина не деформирована, а нить слегка натянута. Отрезки нити, не лежащие на блоках, либо горизонтальны, либо вертикальны. Пренебрегая трением и массой блоков, найти максимальную скорость бруска после отпускания кубика без начальной скорости.



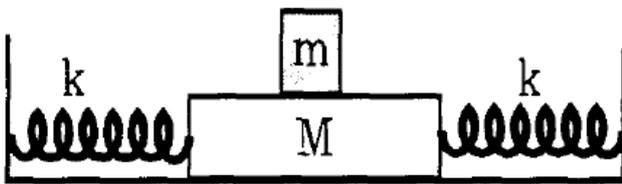
I.14. В цилиндре с площадью поперечного сечения  $S$  под поршнем массы  $m$  находится  $\nu$  молей идеального газа при температуре  $T$ . Поршень связан легкой нерастяжимой нитью,



перекинутой через невесомый блок, с бруском той же массы, находящимся на наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонтом. Найти частоту малых колебаний бруска при постоянной температуре газа. Трение отсутствует. Атмосферное давление равно  $p_a$ .

I.15. Груз массы  $m$  подвешен к потолку на трех невесомых пружинах так, что в положении равновесия оси всех пружин лежат в одной вертикальной плоскости, ось средней пружины жесткостью  $k_1$  вертикальна, а оси двух крайних пружин жесткостью  $k_2$  каждая образуют с осью средней пружины углы  $\alpha$ . Найти период малых вертикальных колебаний груза.

I.16. К доске массы  $M$ , лежащей на гладком горизонтальном столе, прикреплены две легкие одинаковые растянутые пружины, другие концы которых прикреплены к вертикальным стенкам так, что их оси горизонтальны, совпадают и проходят через центр масс доски. На доску поставили кубик массы  $m$  так, что его центр находится над центром масс доски. На сколько можно сместить доску вдоль оси пружин, чтобы после ее отпущения кубик совершал гармонические колебания, если жесткость каждой пружины равна  $k$ , а коэффициент трения кубика о доску равен  $m$ ?



3.128. Конденсатор емкости  $C$  и катушки индуктивности  $L_1$  и  $L_2$  включены в электрическую цепь, как показано на рис. 3.128. Найти наибольшую силу тока в цепи, если начальная разность потенциалов на катушках индуктивности равна  $U_0$ . Энергия магнитного поля в катушке индуктивности  $L$  равна  $LI^2/2$ .

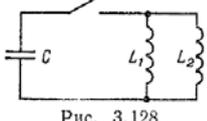
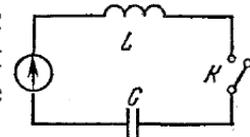


Рис. 3.128

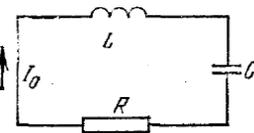
4.6. Источник с э. д. с.  $\mathcal{E}$  и нулевым внутренним сопротивлением в момент времени  $t = 0$  подключают к последовательно соединенным индуктивности  $L$  и емкости  $C$ . Найдите максимальный ток в цепи и максимальный заряд конденсатора.

4.8. В схеме, изображенной на рисунке, в момент времени  $t = 0$  замыкают ключ. Определите ток в цепи, если: а) источник дает постоянное напряжение  $U_0$ ; б) источник дает косинусоидальное напряжение  $U_0 \cos \omega t$ . Определите максимальный ток, если  $U_0 = 100$  В,  $L = 10^{-2}$  Гн,  $C = 10^{-3}$  Ф,  $\nu = \omega/2\pi = 50$  Гц.



К задаче 4.8.

4.9\*. В момент времени  $t = 0$  ток в контуре равен  $I_0$ , а напряжение на индуктивности равно нулю. Найдите ток в последующие моменты времени. Через какое время электромагнитная энергия контура уменьшится вдвое? Считать  $R \ll \sqrt{L/C}$ .



К задаче 4.9\*.

14.83. Тонкий обруч радиусом  $R$  повесили на вбитый в стену гвоздь (рис. 14.22). Найти период малых колебаний обруча. Проскальзывания нет.



рис. 14.22

14.84. Однородный цилиндр массой  $m$  и радиусом  $R$  колеблется на пружине жесткости  $k$  в горизонтальной плоскости (рис. 14.23). Найти период колебаний, если цилиндр не проскальзывает. При какой амплитуде колебаний начинается проскальзывание цилиндра, если коэффициент трения между цилиндром и плоскостью равен  $\mu$ ?



рис. 14.23

14.85. Однородный цилиндр радиусом  $r$  катается по внутренней поверхности цилиндра радиусом  $R$  (рис. 14.24). Найти период малых колебаний. Проскальзывания нет.



рис. 14.24

**14.86.** Однородный стержень, висящий на двух одинаковых вертикальных нитях длиной  $l$ , повернули на малый угол вокруг вертикальной оси, проходящей через его центр, и отпустили (рис 14.25). Каков период малых колебаний стержня?



рис. 14.25

**14.89.** Частица массой  $m$  находится в силовом поле, где ее потенциальная энергия зависит от координаты по закону:  $W(x) = W_0(1 - \cos ax)$ . Найти период малых колебаний частицы около положения равновесия.

